Εισαγωγή στην Τοπολογία, 19/6/2023, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2 μον.)
Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ να δείξετε ότι το κλειστό διαστημα $[a, \beta]$ είναι συμπαγές. (Η απόδειξη να γίνει αποκλειστικά με χρήση του ορισμού).

Θέμα 2. (2 μον.)
Δίνεται ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^2, d)$ όπου

$$d\Big((a,\beta),(\gamma,\delta)\Big) = \begin{cases} |\delta - \beta|, & \text{αν } a = \gamma \\ |\beta| + |\gamma - a| + |\delta|, & \text{αν } a \neq \gamma. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε στην κόλλα σας, σε διορθογώνιο σύστημα αξόνων, την κλειστή μπάλα κέντρου (x, y) και ακτίνας 2 ως προς τη μετρική d, (συμβ. $\widehat{B}_d((x,y),2)$) στις εξής τρεις περιπτώσεις:
α) Για $(x, y) = (2, 3)$.
β) Για $(x, y) = (2, 0)$.
γ) Για $(x, y) = (2, 1)$.
(Σημείωση: Θα κάνετε τρία ξεχωριστά σχήματα).

Δίνεται ότι
C υποσύνολο του D

Θέμα 3. (2 μον.)
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Να δειχθούν τα εξής:
α) Αν C, D δύο μη κενά υποσύνολα του X τότε $\text{diam}(C) \leq \text{diam}(D)$.
β) Αν A, B δύο μη κενά υποσύνολα του X με $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ τότε $\text{diam}(A) = \text{diam}(B)$.

Θέμα 4. (2 μον.)
Α) Να δώσετε τους ορισμούς των εξής εννοιών σε τυχαίο μετρικό χώρο (X, ρ).
α) Ανοιχτή μπάλα β) Κλειστή μπάλα γ) Ανοιχτό σύνολο δ) Κλειστό σύνολο
Β) Να δείξετε ότι κάθε ανοιχτή μπάλα είναι ανοιχτό σύνολο και ότι κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο.
Γ) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος με το σύνολο X να περιέχει δύο τουλάχιστον σημεία να δείξετε ότι υπάρχουν δυο μη κενά ανοικτά υποσύνολα A, B του X ώστε να ισχύει $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Θέμα 5. (2 μον.)
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος.
α) Αν $A \subseteq X$ με το A να είναι συνεκτικό [redacted] να δειχθεί ότι το $\overline{A}$ είναι συνεκτικό.
β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο στο προηγούμενο ερώτημα.

Θέμα 6. (2 μον.)
Να δώσετε τον ορισμό του πλήρη μετρικού χώρου. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αν X είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και ρ μια μετρική στο X τότε ο μερικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης.

Καλή Επιτυχία!